A 2006 MATH. I MP

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2006

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

(Durée de l'épreuve : 3 heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
ENSAE (Statistique), ENSTIM, INT, TPE-EIVP, Cycle international

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et l colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Un élément de $\mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{R})$ sera considéré comme élément de $\mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{C})$. Dans la suite, on identifie les matrices carrées (respectivement les matrices colonnes) et les endomorphismes (respectivement les vecteurs) canoniquement associés dans $\mathbb{C}^n$: par exemple, on note par la même lettre une matrice T de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont T est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

Si $M \in \mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{K})$ et $x \in \mathbb{K}^l$, $(Mx)_i$ désigne la i-ième composante du vecteur $Mx \in \mathbb{K}^n$. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. Pour $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on note

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \text{ et } \|M\|_1 = \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Mx\|_1}{\|x\|_1},$$

pour $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, la norme matricielle subordonnée.

Définition 1 *On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{R})$, de coefficients notés $(m_{ij}, 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq l)$, est positive (respectivement strictement positive), ce que l'on note $M \geq 0$ (respectivement $M > 0$), lorsque tous ses coefficients sont positifs (respectivement strictement positifs) :*

$$m_{ij} \geq 0 \text{ (resp. } m_{ij} > 0) \text{ pour tout } (i,j) \in \{1, \cdots, n\} \times \{1, \cdots, l\}.$$

Pour deux matrices M et N de $\mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{R})$, $M \geq N$ (respectivement $M > N$) lorsque $M - N \geq 0$ (respectivement $M - N > 0$).

Une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ de coefficients notés $(m_{ij}, 1 \leq i, j \leq n)$ est dite stochastique lorsqu'elle est positive et que de plus

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 1, \text{ pour tout } j \in \{1, \cdots, n\}.$$

On définit les ensembles B, B^+ et Σ par :

$$\begin{aligned} B &= \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, x \geq 0 \text{ et } x \neq 0\}, \\ B^+ &= \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, x > 0\}, \\ \Sigma &= \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \|x\|_1 = 1\}. \end{aligned}$$

Nous souhaitons montrer le résultat suivant :

Théorème 1 (Perron-Frobenius) *Soit $T \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ stochastique telle que $(\mathrm{I}_n + T)^{n-1} > 0$. Il existe un vecteur strictement positif x_0 satisfaisant $Tx_0 = x_0$. Toutes les valeurs propres de T sont de module inférieur à 1 et pour tout vecteur y de $\Sigma \cap B$,*

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} T^j y = \frac{x_0}{\|x_0\|_1}.$$

Les deux parties sont dans une large mesure indépendantes.

I Un vecteur propre strictement positif

On suppose que T est un élément positif de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ tel que
$P = (\mathrm{I}_n + T)^{n-1}$ est strictement positive.

1) Montrer que pour tout $x \in B$, l'ensemble $\Gamma_x = \{\theta \in \mathbb{R}^+ \,/\, \theta x \leq Tx\}$ est non vide, fermé et borné.

On note $\theta(x)$ son plus grand élément.

2) Montrer que pour tout $x \in B$, on peut calculer $\theta(x)$ de la manière suivante :

$$\theta(x) = \min \left\{ \frac{(Tx)_i}{x_i} \Big/ \ 1 \leq i \leq n \text{ et } x_i \neq 0 \right\}.$$

On note θ l'application de B dans $\mathbb{R}^+$ qui à x associe $\theta(x)$.

3) Montrer que pour tout $\alpha > 0$ et tout $x \in B$, $\theta(\alpha x) = \theta(x)$.

4) Montrer que $P(B) \subset B^+$.

5) Montrer que pour tout $x \in B$, $\theta(Px) \geq \theta(x)$ et $\theta(Px) > 0$.

6) Soit $x \in B$ un vecteur propre de T. Montrer que $\theta(Px) = \theta(x)$.

7) Soit $x \in B$ tel que $\theta(Px) = \theta(x)$, montrer que x est un vecteur propre de T pour la valeur propre $\theta(x)$.

8) Soit $C = B \cap \Sigma$. Montrer que l'application θ est continue de $P(C)$ dans $\mathbb{R}$.

9) Justifier l'existence de $x_0 \in P(C)$ tel que $\theta(x_0) = \sup\limits_{x \in P(C)} \theta(x)$.

10) Montrer que $\sup\limits_{x \in P(C)} \theta(x) \geq \sup\limits_{x \in C} \theta(x)$.

11) Montrer que $\sup\limits_{x \in B} \theta(x) = \sup\limits_{x \in C} \theta(x)$.

12) Montrer que $\sup_{x\in C}\theta(x) = \sup_{x\in P(C)}\theta(x)$ et que $\theta(x_0) = \sup_{x\in C}\theta(x)$.

On pose $\theta_0 = \theta(x_0)$.

13) Montrer que x_0 est un vecteur propre, strictement positif, de T pour la valeur propre θ_0 et que $\theta_0 > 0$.

II Une méthode d'approximation

On suppose maintenant que T est stochastique et telle que $P = (\mathrm{I}_n + T)^{n-1}$ est strictement positive.

Pour un vecteur $x = (x_1, \cdots, x_n)$ de $\mathbb{C}^n$, on note x^+ le vecteur $(|x_1|, \cdots, |x_n|)$, où $|z|$ est le module du complexe z. Pour tout entier $k \geq 1$, on pose

$$R_k = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} T^j.$$

14) Soit $\theta \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre de T pour la valeur propre θ. Montrer que $|\theta| x^+ \leq T x^+$.

15) En déduire que $|\theta| \leq \theta_0$.

16) Montrer que $|\theta|\, \|x^+\|_1 \leq \|x^+\|_1$ et en déduire que $|\theta| \leq 1$.

17) En déduire $\theta_0 = 1$.

18) Montrer que pour tout $j \geq 1$, T^j et R_j sont des matrices stochastiques.

19) Établir, pour tout $k \geq 1$, les inégalités suivantes :

$$\|T^k\|_1 \leq 1 \text{ et } \|R_k\|_1 \leq 1.$$

20) Montrer que pour tout $k \geq 1$, $\|TR_k - R_k\|_1 \leq \dfrac{2}{k}$.

21) Soit $x \in \mathbb{C}^n$, montrer que la suite $(R_k x, k \geq 1)$ a au moins une valeur d'adhérence.

22) Soit y une valeur d'adhérence de la suite $(R_k x, k \geq 1)$, montrer que $Ty = y$ et que pour tout $k \geq 1$, $R_k y = y$.

23) Soit y et z deux valeurs d'adhérence de $(R_k x, k \geq 1)$, montrer pour tous les entiers m et l, l'identité suivante :

$$y - z = R_l(R_m x - z) - R_m(R_l x - y).$$

24) Montrer que la suite $(R_k x, k \geq 1)$ a exactement une valeur d'adhérence.

25) Montrer qu'il existe une matrice R telle que $Rx = \lim_{k \to +\infty} R_k x$ pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ et $\lim_{k \to +\infty} \|R_k - R\|_1 = 0$.

26) Montrer que T et R commutent.

27) Montrer que $RT = R$ et $R^2 = R$.

28) Caractériser R en fonction de $\mathrm{Ker}(T - \mathrm{I}_n)$ et $\mathrm{Im}(T - \mathrm{I}_n)$.

29) On admet que $\mathrm{Ker}(T - \mathrm{I}_n)$ est de dimension 1. Pour $x \in B$, expliciter Rx en fonction de $\|x\|_1$, $\|x_0\|_1$ et x_0.

FIN DU PROBLÈME

Ce théorème possède d'innombrables applications. L'une des dernières est son utilisation dans le classement (PageRank) des pages Web effectué par le plus connu des moteurs de recherche.

Concours Mines-Ponts 2006

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques 1

rédigé par Stéphane Legros (stephane.legros@free.fr)

I. Calculs préliminaires

1,2) Comme x et T sont positifs, Tx l'est également. On peut ensuite écrire, pour $\theta \geq 0$:

$$\theta \in \Gamma_x \iff \forall i \in \{1, \dots, n\}, \theta x_i \leq (Tx)_i$$

Pour un i tel que $x_i = 0$, θx_i est nul et est toujours inférieur à $(Tx)_i$. Nous en déduisons donc :

$$\theta \in \Gamma_x \iff \forall i \in \{1, \dots, n\} \text{ t.q. } x_i \neq 0,\ \theta \leq \underbrace{\frac{(Tx)_i}{x_i}}_{\geq 0}$$

Comme l'un au moins des x_i est non nul, cela donne $\Gamma_x = \left[0, \min\left\{\frac{(Tx)_i}{x_i},\ 1 \leq i \leq n \text{ et } x_i \neq 0\right\}\right]$ ce qui prouve que Γ_x est non vide, fermé et borné, et que son plus grand élément est :

$$\theta(x) = \min\left\{\frac{(Tx)_i}{x_i},\ 1 \leq i \leq n \text{ et } x_i \neq 0\right\}$$

3) Pour $\alpha > 0$ et $x \in B$, nous avons $x_i \neq 0$ si et seulement si $(\alpha x)_i \neq 0$, et pour un tel i, $\dfrac{(Tx)_i}{x_i} = \dfrac{(T(\alpha x))_i}{(\alpha x)_i}$. La relation précédente donne donc $\theta(x) = \theta(\alpha x)$.

4) Soit $x \in B$ et choisissons i_0 tel que $x_{i_0} > 0$. Nous avons alors $(Px)_i = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{p_{i,j}x_j}_{\geq 0} \geq p_{i,i_0}x_{i_0} > 0$ pour tout i et donc $Px > 0$: nous avons démontré que $P(B) \subset B^+$.

5) Soit $\theta \in \Gamma_x$: Comme P est positive, $\theta x \leq Tx$ donne $P(\theta x) \leq PTx$, i.e. $\theta Px \leq T(Px)$ puisque P et T commutent (P est un polynôme en T). On en déduit que $\Gamma_x \subset \Gamma_{Px}$, puis que $\theta(x) \leq \theta(Px)$.

Notons $y = Px$. Nous savons (question 4) que y est strictement positif. Si l'on avait $(Ty)_i = 0$, la i-ème ligne de T serait nulle (car T est positive). Les matrices T^j, pour $j \geq 1$, auraient alors également leur i-ème ligne nulle et $P = I_n + \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-1}{j} T^j$ ne serait pas strictement positive. On en déduit que Ty est strictement positif, puis que $\theta(Px) > 0$ d'après la question 2).

6) Si $Tx = \lambda x$, alors $\lambda = \theta(x) > 0$ et $Px = (1+\lambda)^{n-1}x$. On en déduit que $\theta(Px) = \theta(x)$ d'après la question 3).

7) Notons $\lambda = \theta(x)$ et supposons que x ne soit pas un vecteur propre pour T associé à λ. Le vecteur $y = Tx - \lambda x$ est alors élément de B. D'après la question 4), Py est élément de B^+, ce qui donne $\lambda(Px) < PTx = T(Px)$. Ainsi, pour tout i, nous avons (en remarquant que $Px > 0$), $\lambda < \dfrac{(T(Px))_i}{(Px)_i}$ et en particulier :

$$\theta(x) = \lambda < \min_{1 \leq i \leq n} \frac{(T(Px))_i}{(Px)_i} = \theta(Px)$$

Nous avons donc démontré par contraposée la propriété demandée.

8) Pour tout i, l'application $x \mapsto (Tx)_i/x_i$ est continue sur B^+ (c'est le quotient de deux formes linéaires). On en déduit que l'application $\varphi \ : \ x \mapsto \min_{1 \leq i \leq n} \frac{(Tx)_i}{x_i}$ est continue sur B^+ : comme $P(C) \subset P(B) \subset B^+$, la restriction de φ à $P(C)$ est donc continue, i.e. que θ est continue sur $P(C)$.

9) $C = \Sigma \cap B = \Sigma \cap \{x \in \mathbb{R}^n, \ x \geq 0\}$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$ (intersection d'un fermé borné et d'un fermé) : il est donc compact. L'application $x \mapsto Px$ étant continue, $P(C)$ est une partie compacte. L'application θ restreinte à ce compact non vide étant continue, elle est bornée et atteint ses bornes : il existe en particulier x_0 dans $P(C)$ tel que $\theta(x_0) = \sup_{x \in P(C)} \theta(x)$.

10) Si $x \in C$, $Px \in P(C)$ et $\theta(x) \leq \theta(Px) \leq \sup_{y \in P(C)} \theta(y)$. Ceci prouve l'inégalité demandée.

11) Si $x \in B$, $y = x/||x||_1$ est élément de C et $\theta(x) = \theta(y)$ d'après 3). Ceci prouve que $\sup_{x \in B} \theta(x) \leq \sup_{x \in C} \theta(x)$. L'inégalité inverse est évidente, puisque $C \subset B$.

12) Comme $P(C) \subset B^+ \subset B$, nous avons directement $\sup_{x \in C} \theta(x) \leq \sup_{x \in P(C)} \theta(x) \leq \sup_{x \in B} \theta(x) = \sup_{x \in C} \theta(x)$, soit :

$$\sup_{x \in C} \theta(x) = \sup_{x \in P(C)} \theta(x) = \theta(x_0).$$

13) Comme x_0 est élément de $P(C)$, il est élément de B^+ et est donc strictement positif.

Il existe $y_0 \in B$ tel que $x_0 = Py_0$; la question 5) donne alors $\theta_0 = \theta(Py_0) > 0$.

Enfin, $\theta(x_0) \leq \theta(Px_0) \leq \sup_{x \in B} \theta(x) = \theta(x_0)$, donc $\theta(x_0) = \theta(Px_0)$ et, d'après la question 7), x_0 est un vecteur propre pour T associé à la valeur propre θ_0.

II. Une méthode d'approximation

14) Pour tout i compris entre 1 et n, nous avons $\theta x_i = \sum_{j=1}^{n} t_{i,j} x_j$, et donc $|\theta||x_i| \leq \sum_{j=1}^{n} t_{i,j} |x_j|$, ce qui donne $|\theta| \, x^+ \leq T x^+$.

15) Comme $x^+ \in B$, $|\theta| \leq \theta(x^+) \leq \sup_{y \in B} \theta(y) = \theta_0$.

16) $$|\theta| \, ||x^+||_1 = ||\theta x||_1 = ||Tx||_1 = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} t_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{1 \leq i,j \leq n} t_{i,j} |x_j| = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} t_{i,j} \right)}_{=1} |x_j| = ||x||_1 = ||x^+||_1.$$

17) Le vecteur $x = (1, 1, \ldots, 1)$ est un vecteur propre pour ${}^tT$, associé à la valeur propre 1. On en déduit que 1 est également valeur propre de T (T et ${}^tT$ ont même polynôme caractéristique). La question 15) donne donc $1 \leq \theta_0$.

D'autre part, la question 13) prouve que θ_0 est une valeur propre de T : on a donc $\theta_0 \leq 1$ d'après la question 16).

18) Tout d'abord, les matrices T^j et R_j sont clairement positive. Ensuite, pour $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ la condition :

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}, \sum_{1 \leq i \leq n} m_{i,j} = 1$$

signifie que le vecteur $e = (1, \ldots, 1)$ est un vecteur propre pour ${}^tM$ associé à la valeur propre 1. Comme ${}^tTe = e$, on obtient ensuite facilement, par récurrence sur j, que ${}^tT^je = e$, puis que ${}^tR_je = e$. Ceci achève de prouver que les matrice T^j et R_j sont stochastiques.

19) Si M est une matrice stochastique, le calcul fait à la question 16) montre que $||Mx||_1 \leq ||x||_1$ pour tout vecteur x. On en déduit que $||M||_1 \leq 1$, et en particulier $||T^k||_1 \leq 1$ et $||R_k||_1 \leq 1$ pour tout $k \geq 1$.

20) Pour $k \geq 1$, $TR_k - R_k = \frac{1}{k}(T^k - I_n)$, donc $||TR_k - R_k||_1 \leq \frac{1}{k}\left(||T^k||_1 + ||I_n||_1\right) \leq \frac{2}{k}$ (car $||I_n||_1 = 1$).

21) Pour $x \in \mathbb{C}^n$, nous avons $||R_kx||_1 \leq ||R_k||_1\, ||x||_1 \leq ||x||_1$ pour tout $k \geq 0$. La suite $(R_kx)_{k\geq 0}$ est donc une suite bornée de l'espace vectoriel normé $(\mathbb{C}^n, ||\ ||_1)$. Comme cet espace est de dimension finie, le théorème de Bolzano-Weïerstrass assure l'existence d'une valeur d'adhérence.

22) Il existe donc une application $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ strictement croissante telle que $R_{\sigma(k)}x \xrightarrow[k\to+\infty]{} y$. On en déduit que $TR_{\sigma(k)}x - R_{\sigma(k)}x$ tend vers $Ty - y$ quand k tend vers l'infini.

D'autre part, $||TR_{\sigma(k)}x - R_{\sigma(k)}x||_1 \leq ||TR_{\sigma(k)} - R_{\sigma(k)}||_1\, ||x||_1 \leq \dfrac{2}{\sigma(k)}\, ||x||_1 \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$, donc $Ty = y$, puis $T^jy = y$ pour tout $j \geq 0$, et enfin $R_ky = \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} T^jy = y$ pour tout $k \geq 1$.

23) Soient $m, l \geq 1$. Comme R_l et R_m commutent (ce sont deux polynômes en T), nous avons directement :

$$R_l(R_mx - z) - R_m(R_lx - y) = R_lR_mx - R_lz - R_lR_mx + R_my = y - z$$

24) Supposons comme à la question précédente que y et z sont deux valeurs d'adhérence de la suite (R_kx). Il existe alors $\sigma, \sigma' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ strictement croissantes telles que $R_{\sigma(k)}x \xrightarrow[k\to+\infty]{} y$ et $R_{\sigma'(k)}x \xrightarrow[k\to+\infty]{} z$. Nous avons alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
||y - z||_1 &= \left|\left|R_{\sigma(k)}(R_{\sigma'(k)}x - z) - R_{\sigma'(k)}(R_{\sigma(k)}x - y)\right|\right|_1 \\
&\leq \underbrace{||R_{\sigma(k)}||_1}_{\leq 1}\, ||R_{\sigma'(k)}x - z||_1 + \underbrace{||R_{\sigma'(k)}||_1}_{\leq 1}\, ||(R_{\sigma(k)}x - y)||_1 \\
&\leq ||R_{\sigma'(k)}x - z||_1 + ||R_{\sigma(k)}x - y||_1 \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0
\end{aligned}$$

Ceci prouve que $y = z$: la suite (R_kx) possède donc une et une seule valeur d'adhérence.

25) On en déduit que pour tout x, la suite (R_kx) est convergente (une suite d'un compact qui ne possède qu'une valeur d'adhérence est convergente). Notons donc f l'application :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ & x & \longmapsto & \lim\limits_{+\infty} R_kx \end{array}$$

f est clairement linéaire, puisque si $x, y \in \mathbb{C}^n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a $R_k(\lambda x + \mu y) = \lambda R_k(x) + \mu R_k(y)$ pour tout k, ce qui donne $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ quand k tend vers l'infini. En en déduit qu'il existe une matrice R telle que $\forall\, x \in \mathbb{C}^n$, $Rx = f(x) = \lim\limits_{k \to +\infty} R_k x$.

En choisissant pour x le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$, nous en déduisons que la i-ème colonne de R_k converge vers la i-ème colonne de R. Ceci prouve que la suite (R_k) converge vers R "terme à terme", i.e. pour $\|\ \|_\infty$. Les normes étant équivalentes en dimension finie, on en déduit que R_k tend également vers R au sens de la norme $\|\ \|_1$ quand k tend vers l'infini.

Remarque : on peut évidemment se passer de l'équivalence des normes en remarquant que $\|\ \|_1 \leq n\|\ \|_\infty$.

26) T commute avec chaque R_k, donc, par continuité du produit matriciel, T commute avec $R = \lim_{+\infty} R_k$.

27) En faisant tendre k vers l'infini dans l'inégalité de la question 20), nous obtenons $\|TR - R\|_1 = 0$, soit $R = TR = RT$. On en déduit que $RT^j = R$ pour tout $j \in \mathbb{N}$, puis :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ RR_k = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} RT^j = R$$

ce qui donne enfin $R^2 = R$ en faisant tendre k vers l'infini.

28) R est une projection : elle est donc caractérisée par ses espaces propres $\operatorname{Ker}(R)$ et $\operatorname{Ker}(R - I_n) = \operatorname{Im}(R)$.

Comme $(T - I_n)R = 0$, on a $\operatorname{Im}(R) \subset \operatorname{Ker}(T - I_n)$. D'autre part, si $x \in \operatorname{Ker}(T - I_n)$, $R_k(x) = x$ pour tout $k \geq 1$ et donc $R(x) = x$: ceci prouve que $x \in \operatorname{Im}(R)$, ce qui donne $\operatorname{Im}(R) = \operatorname{Ker}(T - I_n)$.

Enfin, $R(T - I_n) = 0$ donne $\operatorname{Im}(T - I_n) \subset \operatorname{Ker}(R)$. Par la formule du rang, nous avons :

$$\dim(\operatorname{Ker}(R)) = n - \dim(\operatorname{Im}(R)) = n - \dim(\operatorname{Ker}(T - I_n)) = \dim(\operatorname{Im}(T - I_n))$$

et donc $\operatorname{Ker}(R) = \operatorname{Im}(T - I_n)$.

Ceci prouve que R est la projection sur l'espace propre $\operatorname{Ker}(T - I_n)$ parallèlement à l'espace $\operatorname{Im}(T - I_n)$ (ces deux sous-espaces étant en particulier supplémentaires).

29) Comme $\operatorname{Ker}(T - I_n)$ est de dimension 1, il est engendré par le vecteur x_0. D'autre part, T étant stochastique, les vecteurs colonnes de la matrice $T - I_n$ sont contenus dans l'hyperplan d'équation $x_1 + \cdots + x_n = 0$. Comme $\operatorname{Im}(T - I_n)$ est un hyperplan, on en déduit que c'est exactement l'ensemble des vecteurs x vérifiant $x_1 + \cdots + x_n = 0$. Un élément x de B s'écrit alors d'une unique façon sous la forme :

$$x = \lambda x_0 + y$$

avec $y_1 + \cdots + y_n = 0$. On en déduit que $\sum_{i=1}^{n} x_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} (x_0)_i + \sum_{i=1}^{n} y_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} (x_0)_i$. Comme les deux vecteurs x_0 et x sont élément de B, cela donne $\lambda = \dfrac{\|x\|_1}{\|x_0\|_1}$. Nous avons ainsi calculé le projeté de x sur $\operatorname{Im}(R)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(R)$:

$$\forall x \in B,\ R(x) = \|x\|_1 \frac{x_0}{\|x_0\|_1}.$$

Ceci achève de démontrer le théorème de Perron-Froebenius : si y est élément de $\Sigma \cap B$, $\|y\|_1 = 1$ et l'égalité précédente s'écrit :

$$\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} T^j(y) \xrightarrow[k \to +\infty]{} \frac{x_0}{\|x_0\|_1}$$

ce qui permet d'approximer le vecteur propre strictement positif unitaire associé à la valeur propre 1.